

# 一种基于窄带信号多普勒频率测量的运动目标直接定位方法

王 鼎<sup>1</sup>, 张 刚<sup>2</sup>

(1. 解放军信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450001; 2. 解放军信息工程大学科研部, 河南郑州 450001)

**摘 要:** 相比于常规的两步定位方法, 目标直接定位方法具有更高的定位精度, 但现有的直接定位方法主要是针对静止目标所提出的, 并具有较高的运算量. 本文提出了一种针对匀速运动目标的多普勒频率直接定位方法. 文中首先基于最大似然准则推导了直接估计目标初始位置和运动速度的优化模型, 针对该优化模型是以矩阵特征值的形式给出而难以数值求解的问题, 提出了一种基于矩阵特征值扰动定理的 Newton 型迭代算法, 该算法可以避免多维参数网格搜索所导致的庞大运算量. 此外, 文中还推导了关于目标初始位置、运动速度以及运动航迹估计的克拉美罗界的闭式表达式. 数值实验表明新方法的目标位置估计方差可以达到克拉美罗界, 并且具有较少的运算量.

**关键词:** 直接位置确定; 多普勒频率; 最大似然估计; 匀速运动目标; 特征扰动; 克拉美罗界

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2017)03-0591-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.013

## A Direct Localization Method for Moving Narrowband Source Based on Doppler Frequency Shifts

WANG Ding<sup>1</sup>, ZHANG Gang<sup>2</sup>

(1. School of Information Systems Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

2. Scientific Research Department, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

**Abstract:** Compared to the conventional two-step localization method, the direct position determination (DPD) method has higher location accuracy. However, the DPD method is usually proposed for static target and is computationally expensive. This paper presents a novel DPD method for moving target at constant velocity based on the Doppler frequency shifts. First, the optimization model for directly determining the initial position and velocity of the emitter is constructed on the basis of maximum likelihood estimator (MLE), and the cost function is formulated as the maximal eigenvalue of the Hermitian matrix. In order to avoid multidimensional grid search, a Newton-type iterative algorithm based on matrix eigen-perturbation theory is proposed, which involves lower computational complexity than the multidimensional grid search. In addition, the compact Cramér-Rao bound (CRB) expressions for initial position, moving velocity and track estimates are derived, which can provide a theoretical prediction for target position determination. Simulation results corroborate that the estimate variance of the proposed method is able to attain the CRB with lower computational complexity.

**Key words:** direct position determination (DPD); Doppler frequency shift; maximum likelihood estimator (MLE); moving target at constant velocity; eigen-perturbation; Cramér-Rao bound (CRB)

## 1 引言

最为典型的无线电信号定位观测量包括: 到达角度 (Angle Of Arrival, AOA)<sup>[1]</sup>、到达时间差 (Time Difference Of Arrival, TDOA)<sup>[2,3]</sup>、到达频率差 (Frequency

Difference Of Arrival, FDOA) 或称多普勒频率<sup>[4-6]</sup>、到达时间 (Time Of Arrival, TOA)<sup>[7]</sup>、到达频率 (Frequency Of Arrival, FOA)<sup>[8]</sup>、接收信号强度 (Received Signal Strength, RSS)<sup>[9]</sup> 等空、时、频、能量域参数. 根据上述观测量可以建立目标位置信息 (包括位置和运动速度等

参数)和观测站位置信息间的代数方程,通过优化求解该方程即可估计目标的位置参数.

当目标与观测站存在径向速度时,采用多普勒频率定位是一种较好的选择.最为经典的多普勒频率定位方法是差分多普勒(Differential Doppler, DD)定位方法<sup>[4-6,10]</sup>,这种定位方式通常称为两步估计定位方法.针对两步估计定位方法的不足,Weiss 和 Amar 等人提出了一种新型无线电信号定位方法<sup>[10-16]</sup>,即目标位置直接确定(Direct Position Determination, DPD)或称直接定位(Direct Localization, DL)技术.该技术的基本思想是从观测站接收到的无线电信号中直接提取目标位置信息.大量实验表明:直接定位方法比两步估计定位方法具有更高的估计精度和更低的分辨门限.

针对多普勒频率定位体制,Weiss 和 Amar 设计了基于窄带信号多普勒频率的直接定位方法<sup>[10]</sup>.然而,该方法是针对静止目标所设计的,而且其中推导的定位优化函数是以矩阵特征值的形式给出,难以形成有效的数值优化方法.因此,本文在文献[10]的基础上,提出了一种针对匀速运动目标的多普勒频率直接定位方法.文中首先依据最大似然准则建立直接估计目标初始位置和运动速度的数学优化模型,针对该优化模型,文中提出了一种基于矩阵特征值扰动定理的 Newton 迭代算法,该算法可避免多维网格搜索所导致的庞大运算.此外,文中还推导了参数估计方差的克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB)的闭式表达式.

## 2 信号模型与若干假设

现有一个待定位的匀速直线运动目标,其初始位置向量为  $\mathbf{q}_0$ ,运动速度向量为  $\dot{\mathbf{q}}$ ,目标辐射窄带无线电信号,并且该信号能够同时被  $L$  个运动观测站所截获.假设每个观测站在  $K$  个时隙段对目标辐射信号进行采样,相邻两个时隙段的时间间隔为  $T$ ,并将第一个时隙段的目标位置设为其初始位置(即  $\mathbf{q}_0$ ).为了对运动目标实现直接定位,这里还需要做出如下两点假设:

(a) 在每个采样时隙段内(通常时间很短),目标与观测站的瞬时位置和速度均保持不变,于是目标在第  $k$  个时隙段的位置向量为  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_0 + (k-1)T\dot{\mathbf{q}}$ ,并且将第  $l$  个观测站在第  $k$  个时隙段内的位置向量和速度向量分别记为  $\mathbf{p}_{l,k}$  和  $\dot{\mathbf{p}}_{l,k}$ ;

(b) 目标辐射窄带信号,并且信号带宽  $B$  小于信号到达不同观测站的时延最大值  $\tau_{\max}$  的倒数,即  $B < 1/\tau_{\max}$ .

基于上述讨论和假设,第  $l$  个观测站在第  $k$  个时隙段所截获到的信号模型可以描述为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{l,k}(t) &= \alpha_{l,k} s_k(t) \cdot \exp\{j2\pi f_{l,k} t\} + n_{l,k}(t) \\ &= x_{l,k}(t) + n_{l,k}(t), (1 \leq l \leq L; 1 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $s_k(t)$  表示信号在第  $k$  个时隙段内的复包络,它对于每个观测站而言是一致的(由于假设(b)),  $n_{l,k}(t)$  表示零均值高斯白噪声,  $\alpha_{l,k}$  表示未知的复标量,它反映了信号在第  $k$  个时隙段到达第  $l$  个观测站的传播系数,  $f_{l,k}$  表示第  $l$  个观测站在第  $k$  个时隙段截获信号的频率,该频率可以建模表示为

$$f_{l,k} = (f_c + \Delta f_k)(1 + \phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}})) \quad (2)$$

式中  $f_c$  表示信号载波频率的标称值,  $\Delta f_k$  表示由于目标辐射信号的不稳定而导致的频率扰动,  $\phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}})$  的代数表达式为

$$\phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{(\dot{\mathbf{p}}_{l,k}^T - \dot{\mathbf{q}}^T)(\mathbf{q}_k - \mathbf{p}_{l,k})}{\|\mathbf{q}_k - \mathbf{p}_{l,k}\|_2} \quad (3)$$

式中  $\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}_0^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , 在目标做匀速直线运动的假设条件下该向量包含了目标全部位置信息.需要指出的是,通常有  $\phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \ll 1$  和  $\Delta f_k \ll f_c$ , 于是  $f_{l,k}$  可以近似表示为

$$f_{l,k} \approx f_c + \Delta f_k + f_c \phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (4)$$

由于  $f_c$  是已知量,因此通过下变频处理后得到的信号频率可以表示为

$$\tilde{f}_{l,k} \approx \Delta f_k + f_c \phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (5)$$

假设观测站的信号采样时间间隔为  $T_s$ , 并且在每个时隙段采出了  $N$  个信号样本点,若将这  $N$  个信号采样值合并成向量的形式就可以得到如下观测模型

$$\hat{\mathbf{x}}_{l,k} = \alpha_{l,k} \mathbf{A}_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_{l,k}, (1 \leq l \leq L; 1 \leq k \leq K) \quad (6)$$

式中

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{l,k} = [\hat{x}_{l,k}(t_1) \hat{x}_{l,k}(t_2) \cdots \hat{x}_{l,k}(t_N)]^T \\ \mathbf{s}_k = [s_k(t_1) s_k(t_2) \cdots s_k(t_N)]^T \\ \mathbf{n}_{l,k} = [n_{l,k}(t_1) n_{l,k}(t_2) \cdots n_{l,k}(t_N)]^T \\ \mathbf{B}_k = \text{diag}[1 \exp\{j2\pi \Delta f_k T_s\} \cdots \exp\{j2\pi \Delta f_k (N-1) T_s\}] \\ \mathbf{A}_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) = \text{diag}[1 \exp\{j2\pi f_c \phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) T_s\} \cdots \\ \exp\{j2\pi f_c \phi_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) (N-1) T_s\}] \end{cases} \quad (7)$$

## 3 基于最大似然准则的直接定位优化模型及其实现算法

### 3.1 直接定位优化模型的确立

为了给出渐近最优的估计精度,这里将利用最大似然准则对未知向量  $\bar{\mathbf{q}}$  进行参数估计.假设  $\mathbf{n}_{l,k}$  服从零均值高斯分布,其方差为  $\sigma^2$ ,则可以得到如下最小二乘优化模型

$$\begin{aligned} \{\hat{\alpha}_{l,k}, \hat{\mathbf{s}}_k, \hat{\Delta f}_k, \hat{\bar{\mathbf{q}}}\} &= \\ \arg \min \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L &\|\hat{\mathbf{x}}_{l,k} - \alpha_{l,k} \mathbf{A}_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k\|_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

需要指出的是,为了避免参数连乘( $\alpha_{l,k}$  和  $\mathbf{s}_k$  之间)所导致的估计模糊问题,需要增加约束  $\|\mathbf{s}_k\|_2 = 1$ .

下面将讨论式(8)的优化求解问题.首先,由式(8)

可以得到复标量  $\alpha_{l,k}$  的最优闭式解为

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{l,k} &= (\mathbf{s}_k^H \mathbf{B}_k^H \mathbf{A}_{l,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{A}_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k)^{-1} \mathbf{s}_k^H \mathbf{B}_k^H \mathbf{A}_{l,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{l,k} \\ &= \mathbf{s}_k^H \mathbf{B}_k^H \mathbf{A}_{l,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{l,k}\end{aligned}\quad (9)$$

将式(9)代入式(8)中可得

$$\begin{aligned}\{\hat{\mathbf{s}}_k, \hat{\Delta \hat{f}}_k, \hat{\bar{\mathbf{q}}}\} &= \arg \max \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k^H \mathbf{B}_k^H \\ &\quad \left( \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_{l,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{l,k} \hat{\mathbf{x}}_{l,k}^H \mathbf{A}_{l,k}(\bar{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k\end{aligned}\quad (10)$$

分别定义一个新的向量和矩阵如下

$$\begin{cases} \mathbf{v}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \\ \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) = [\mathbf{A}_{1,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{1,k} \mathbf{A}_{1,k}(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{1,k}^H \cdots \mathbf{A}_{L,k}^H(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{L,k} \mathbf{A}_{L,k}(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{x}}_{L,k}^H] \end{cases}\quad (11)$$

则可将式(10)转化为

$$\{\hat{\mathbf{s}}_k, \hat{\Delta \hat{f}}_k, \hat{\bar{\mathbf{q}}}\} = \arg \max \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_k^H \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{v}_k \quad (12)$$

式中  $\mathbf{v}_k$  满足约束  $\|\mathbf{v}_k\|_2 = 1$ . 不难证明式(12)中向量  $\mathbf{v}_k$  的最优解为

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \mathbf{t}_{\max}[\mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}})], 1 \leq k \leq K \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)中可以得到仅关于未知向量  $\bar{\mathbf{q}}$  的数学优化模型为

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\mathbf{q}}} &= \arg \max \sum_{k=1}^K \lambda_{\max}[\mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}})] \\ &= \arg \max \sum_{k=1}^K \lambda_{\max}[\mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}})] = \operatorname{argmax} J(\bar{\mathbf{q}})\end{aligned}\quad (14)$$

式(14)即为直接定位的数学优化模型,其优化求解过程并不易实现,主要原因在于目标函数  $J(\bar{\mathbf{q}})$  是以矩阵特征值的形式给出. 针对该问题,下面将基于矩阵特征扰动理论,提出一种 Newton 型迭代算法. 我们将通过 Hermitian 矩阵特征扰动理论推导  $J(\bar{\mathbf{q}})$  的梯度向量和 Hessian 矩阵的代数表达式,从而利用 Newton 迭代法进行数值寻优. 虽然该算法属于迭代类算法,但是其计算量相对于网格遍历搜索而言会大大降低.

### 3.2 基于 Newton 型迭代的数值优化算法

下面首先给出一个关于 Hermitian 矩阵特征值扰动的重要结论.

**命题 1** 设  $\mathbf{X}$  是  $n \times n$  阶半正定 Hermitian 矩阵,该矩阵  $n$  个特征值及其单位特征向量分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  和  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , 令该矩阵受到扰动后得到半正定 Hermitian 矩阵为  $\hat{\mathbf{X}}$  (其扰动量  $\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}$  亦为 Hermitian 矩阵), 并且它的  $n$  个特征值分别为  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$ , 则有如下关系式

$$\hat{\lambda}_p = \lambda_p + \mathbf{e}_p^H \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_p^H \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{E}_p \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{e}_p + o(\|\tilde{\mathbf{X}}\|_2^2), 1 \leq p \leq n \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{E}_p = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (\lambda_p - \lambda_q)^{-1} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_q^H, 1 \leq p \leq n \quad (16)$$

下面将基于命题 1 中的结论推导  $J(\bar{\mathbf{q}})$  的梯度向量和 Hessian 矩阵. 首先令  $X_q(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}})$ , 并假设其  $L$  个特征值为  $\lambda_{k,1} \leq \lambda_{k,2} \leq \dots \leq \lambda_{k,L}$ , 相应的单位特征向量为  $\mathbf{e}_{k,1}, \mathbf{e}_{k,2}, \dots, \mathbf{e}_{k,L}$ , 再令  $\hat{\bar{\mathbf{q}}}$  是属于  $\bar{\mathbf{q}}$  的某个  $\varepsilon$ -领域内的向量 (其扰动向量为  $\tilde{\bar{\mathbf{q}}} = \hat{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathbf{q}}$ ), 并且矩阵  $\mathbf{X}_k(\bar{\mathbf{q}})$  的  $L$  个特征值为  $\hat{\lambda}_{k,1} \leq \hat{\lambda}_{k,2} \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{k,L}$ , 相应的单位特征向量为  $\hat{\mathbf{e}}_{k,1}, \hat{\mathbf{e}}_{k,2}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{k,L}$ , 再记  $\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k(\hat{\bar{\mathbf{q}}}) - \mathbf{X}_k(\bar{\mathbf{q}})$ , 则根据命题 1 中的结论可得

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{k,L} &= \lambda_{k,L} + \mathbf{e}_{k,L}^H \tilde{\mathbf{X}}_k \mathbf{e}_{k,L} + \mathbf{e}_{k,L}^H \tilde{\mathbf{X}}_k \mathbf{E}_k \tilde{\mathbf{X}}_k \mathbf{e}_{k,L} \\ &\quad + o(\|\tilde{\mathbf{X}}_k\|_2^2), 1 \leq k \leq K\end{aligned}\quad (17)$$

式中

$$\mathbf{E}_{k,L} = \sum_{q=1}^{L-1} (\lambda_{k,L} - \lambda_{k,q})^{-1} \mathbf{e}_{k,q} \mathbf{e}_{k,q}^H \quad (18)$$

基于上述分析,下面还需要接着推导扰动矩阵  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  关于扰动向量  $\tilde{\bar{\mathbf{q}}}$  的二阶表示形式. 若记  $\tilde{\bar{\mathbf{q}}} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_D]^T$ , 并将矩阵  $\mathbf{X}_k(\hat{\bar{\mathbf{q}}})$  在  $\bar{\mathbf{q}}$  处进行二阶 Taylor 级数展开可得

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_k(\hat{\bar{\mathbf{q}}}) &= \mathbf{X}_k(\bar{\mathbf{q}}) + \sum_{d=1}^D \tilde{q}_d \dot{\mathbf{X}}_{k,d}(\bar{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d_1=1}^D \sum_{d_2=1}^D \tilde{q}_{d_1} \tilde{q}_{d_2} \ddot{\mathbf{X}}_{k,d_1,d_2}(\bar{\mathbf{q}}) + o(\|\tilde{\bar{\mathbf{q}}}\|_2^2)\end{aligned}\quad (19)$$

式中

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{k,d}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle_d} \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\partial \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle_d} \\ \quad = \dot{\mathbf{V}}_{k,d}^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{V}}_{k,d}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \ddot{\mathbf{X}}_{k,d_1,d_2}(\bar{\mathbf{q}}) = \ddot{\mathbf{V}}_{k,d_1,d_2}^H(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}_k(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{V}_k^H(\bar{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{V}}_{k,d_1,d_2}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \quad + \dot{\mathbf{V}}_{k,d_1}^H(\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{V}}_{k,d_2}(\bar{\mathbf{q}}) + \dot{\mathbf{V}}_{k,d_2}^H(\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{V}}_{k,d_1}(\bar{\mathbf{q}}) \end{cases}\quad (20)$$

根据式(19)可知扰动矩阵  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  的二阶误差表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_k &= \sum_{d=1}^D \tilde{q}_d \dot{\mathbf{X}}_{k,d}(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \sum_{d_1=1}^D \sum_{d_2=1}^D \tilde{q}_{d_1} \tilde{q}_{d_2} \ddot{\mathbf{X}}_{k,d_1,d_2}(\bar{\mathbf{q}}) \\ &\quad + o(\|\tilde{\bar{\mathbf{q}}}\|_2^2)\end{aligned}\quad (21)$$

将式(21)代入式(17)中可得

$$\hat{\lambda}_{k,L} = \lambda_{k,L} + \hat{\mathbf{q}}^T \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_k(\bar{\mathbf{q}}) \hat{\bar{\mathbf{q}}} + o(\|\hat{\bar{\mathbf{q}}}\|_2^2) \quad (22)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{q}}) = [\mathbf{e}_{k,L}^H \dot{\mathbf{X}}_{k,1}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{e}_{k,L}, \mathbf{e}_{k,L}^H \dot{\mathbf{X}}_{k,2}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{e}_{k,L}, \dots, \mathbf{e}_{k,L}^H \dot{\mathbf{X}}_{k,D}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{e}_{k,L}]^T \\ \mathbf{H}_k(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{H}_{k,1}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{H}_{k,2}(\bar{\mathbf{q}}) \end{cases}\quad (23)$$

其中

$$\mathbf{H}_{k,1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,1,1}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,1,2}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \cdots & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,1,D}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \\ \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,2,1}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,2,2}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \cdots & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,2,D}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,D,1}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,D,2}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} & \cdots & \mathbf{e}_{k,L}^H \ddot{\mathbf{X}}_{k,D,D}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_{k,2}(\bar{q}) = 2 \cdot [\dot{\mathbf{X}}_{k,1}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \dot{\mathbf{X}}_{k,2}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \cdots \dot{\mathbf{X}}_{k,D}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L}]^H \cdot \mathbf{E}_{k,L} \times [\dot{\mathbf{X}}_{k,1}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \dot{\mathbf{X}}_{k,2}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L} \cdots \dot{\mathbf{X}}_{k,D}(\bar{q}) \mathbf{e}_{k,L}] \quad (25)$$

根据式(22)可以得到  $J(\bar{q})$  关于向量  $\bar{q}$  的扰动量  $\tilde{q}$  的二阶表示形式为

$$J(\hat{q}) = \sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_{k,L} = J(\bar{q}) + \tilde{q}^T h(\bar{q}) + \frac{1}{2} \tilde{q}^T \mathbf{H}(\bar{q}) \tilde{q} + o(\|\tilde{q}\|^2) \quad (26)$$

式中

$$\mathbf{h}(\bar{q}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^K \mathbf{h}_k(\bar{q})\right), \mathbf{H}(\bar{q}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k(\bar{q})\right) \quad (27)$$

显然,  $\mathbf{h}(\bar{q})$  和  $\mathbf{H}(\bar{q})$  即为目标函数  $J(\bar{q})$  关于向量  $\bar{q}$  的梯度向量和 Hessian 矩阵的解析表达式, 基于此就可以给出求解式(14)的 Newton 型迭代算法:

**步骤 1** 利用差分多普勒两步估计定位法确定初始值  $\hat{q}^{(0)}$ , 并设置步长因子  $\mu (0 < \mu < 1)$ , 再令  $\varepsilon$  为小正数 (例如  $\varepsilon = 10^{-6}$ ) 和  $m \leftarrow 0$ ;

**步骤 2** 对矩阵  $\mathbf{X}_k(\hat{q}^{(m)}) = \mathbf{V}_k^H(\hat{q}^{(m)}) \mathbf{V}_k(\hat{q}^{(m)})$  ( $1 \leq k \leq K$ ) 进行特征分解, 确定其单位特征向量  $\mathbf{e}_{k,l}$  ( $1 \leq k \leq K; 1 \leq l \leq L$ ), 并根据式(18)计算矩阵  $\mathbf{E}_{k,L}$  ( $1 \leq k \leq K$ );

**步骤 3** 利用式(20)计算矩阵  $\dot{\mathbf{X}}_{k,d}(\hat{q}^{(m)})$  ( $1 \leq k \leq K; 1 \leq d \leq D$ ) 和  $\ddot{\mathbf{X}}_{k,d_1,d_2}(\hat{q}^{(m)})$  ( $1 \leq k \leq K; 1 \leq d_1, d_2 \leq D$ );

**步骤 4** 利用式(23)至式(25)计算向量  $\mathbf{h}_k(\hat{q}^{(m)})$  ( $1 \leq k \leq K$ ) 和矩阵  $\mathbf{H}_k(\hat{q}^{(m)})$  ( $1 \leq k \leq K$ ), 并根据式(27)确定梯度向量  $\mathbf{h}(\hat{q}^{(m)})$  和 Hessian 矩阵  $\mathbf{H}(\hat{q}^{(m)})$ ;

$$\begin{cases} \Sigma_{\text{Re}(s)} = \text{blkdiag}[\mathbf{C}_{1,1} \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{I}}_N^T \mathbf{C}_{1,2} \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{I}}_N^T \cdots \mathbf{C}_{1,K} \mathbf{B}_K \bar{\mathbf{I}}_N^T] \\ \Sigma_{\text{Im}(s)} = j \cdot \text{blkdiag}[\mathbf{C}_{1,1} \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{I}}_N^T \mathbf{C}_{1,2} \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{I}}_N^T \cdots \mathbf{C}_{1,K} \mathbf{B}_K \bar{\mathbf{I}}_N^T] \\ \Sigma_{\bar{q}} = [((\mathbf{I}_L \otimes \text{diag}[\mathbf{B}_1 \mathbf{s}_1]) \mathbf{C}_{2,1})^H ((\mathbf{I}_L \otimes \text{diag}[\mathbf{B}_2 \mathbf{s}_2]) \mathbf{C}_{2,2})^H \cdots ((\mathbf{I}_L \otimes \text{diag}[\mathbf{B}_K \mathbf{s}_K]) \mathbf{C}_{2,K})^H]^H \\ \Sigma_{\Delta f} = \text{blkdiag}[\mathbf{C}_{1,1} \cdot \text{diag}[\mathbf{s}_1] \cdot \dot{\mathbf{b}}_1 \mathbf{C}_{1,2} \cdot \text{diag}[\mathbf{s}_2] \cdot \dot{\mathbf{b}}_2 \cdots \mathbf{C}_{1,K} \cdot \text{diag}[\mathbf{s}_K] \cdot \dot{\mathbf{b}}_K] \\ \Sigma_{\text{Re}(\alpha)} = \mathbf{C}_3 \cdot \text{blkdiag}[\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_1 \mathbf{s}_1) \mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_2 \mathbf{s}_2) \cdots \mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_K \mathbf{s}_K)] \\ \Sigma_{\text{Im}(\alpha)} = j \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \text{blkdiag}[\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_1 \mathbf{s}_1) \mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_2 \mathbf{s}_2) \cdots \mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_K \mathbf{s}_K)] \end{cases} \quad (32)$$

式中

**步骤 5** 若  $\|\mathbf{h}(\hat{q}^{(m)})\|_2 \leq \varepsilon$  则停止计算, 否则转至步骤 6;

**步骤 6** 计算  $\hat{q}^{(m+1)} = \hat{q}^{(m)} - \mu^m \mathbf{H}^{-1}(\hat{q}^{(m)}) \mathbf{h}(\hat{q}^{(m)})$ , 再令  $m \leftarrow m + 1$ , 并转至步骤 2.

## 4 目标直接定位方差的克拉美罗界

### 4.1 未知参量 $\bar{q}$ 的估计方差克拉美罗界

本小节将推导未知参量  $\bar{q}$  的估计方差克拉美罗界的表达式. 为此首先给出如下结论.

**命题 2**<sup>[17]</sup> 假设实向量  $\mathbf{y}$  的估计方差克拉美罗界矩阵为  $\text{CRB}(\mathbf{y})$ , 若定义一个新的实向量  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{y}$  (其中  $\mathbf{F}$  为可逆方阵), 则关于向量  $\bar{\mathbf{y}}$  的估计方差克拉美罗界矩阵可表示为  $\text{CRB}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{F} \cdot \text{CRB}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}^T$ .

首先定义一个新的向量  $\boldsymbol{\rho}$  包含所有未知参量, 即有

$$\boldsymbol{\rho} = [\sigma^2 \boldsymbol{\mu}^T]^T = [\sigma^2 \text{Re}^T(\mathbf{s}) \text{Im}^T(\mathbf{s}) \bar{\mathbf{q}}^T \Delta \mathbf{f}^T \text{Re}^T(\boldsymbol{\alpha}) \text{Im}^T(\boldsymbol{\alpha})]^T \quad (28)$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} = [\text{Re}^T(\mathbf{s}) \text{Im}^T(\mathbf{s}) \bar{\mathbf{q}}^T \Delta \mathbf{f}^T \text{Re}^T(\boldsymbol{\alpha}) \text{Im}^T(\boldsymbol{\alpha})]^T \\ \boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1^H \boldsymbol{\alpha}_2^H \cdots \boldsymbol{\alpha}_K^H]^H, \boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{1,k} \alpha_{2,k} \cdots \alpha_{L,k}]^T \\ \mathbf{s} = [(\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{s}_1)^H (\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{s}_2)^H \cdots (\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{s}_K)^H]^H, \bar{\mathbf{I}}_N = [\mathbf{O}_{(N-1) \times 1} \mathbf{I}_{N-1}] \\ \Delta \mathbf{f} = [\Delta f_1 \Delta f_2 \cdots \Delta f_K]^T \end{cases} \quad (29)$$

则关于向量  $\boldsymbol{\mu}$  的估计方差克拉美罗界矩阵可以表示为

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{Re}^{-1}(\Sigma_{\boldsymbol{\mu}}^H \Sigma_{\boldsymbol{\mu}}) \quad (30)$$

式中

$$\Sigma_{\boldsymbol{\mu}} = [\Sigma_{\text{Re}(s)} \Sigma_{\text{Im}(s)} \Sigma_{\bar{q}} \Sigma_{\Delta f} \Sigma_{\text{Re}(\alpha)} \Sigma_{\text{Im}(\alpha)}] \quad (31)$$

更具体地, 式(31)中每个子矩阵块的表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{C}_{1,k} &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,k} \mathbf{A}_{1,k}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \alpha_{2,k} \mathbf{A}_{2,k}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \vdots \\ \alpha_{L,k} \mathbf{A}_{L,k}(\bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{2,k} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}^T} \begin{bmatrix} \text{vecd}[\alpha_{1,k} \mathbf{A}_{1,k}(\bar{\mathbf{q}})] \\ \text{vecd}[\alpha_{2,k} \mathbf{A}_{2,k}(\bar{\mathbf{q}})] \\ \vdots \\ \text{vecd}[\alpha_{L,k} \mathbf{A}_{L,k}(\bar{\mathbf{q}})] \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}}_k = \frac{\partial \text{vecd}[\mathbf{B}_k]}{\partial \Delta f_k} \\ \mathbf{C}_3 &= \text{blkdiag}[\mathbf{A}_{1,1}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{A}_{2,1}(\bar{\mathbf{q}}) \cdots \mathbf{A}_{L,1}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{A}_{1,2}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{A}_{2,2}(\bar{\mathbf{q}}) \cdots \mathbf{A}_{L,2}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{1,K}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{A}_{2,K}(\bar{\mathbf{q}}) \cdots \mathbf{A}_{L,K}(\bar{\mathbf{q}})] \end{aligned} \right. \quad (33)$$

需要指出的是,从式(30)中难以直接获得关于  $\text{CRB}(\bar{\mathbf{q}})$  的闭式表达式. 为了能够获得  $\text{CRB}(\bar{\mathbf{q}})$  的表达式,需要定义一个新的实参数向量

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = [(\text{Re}(\mathbf{s}) + \text{Re}(\mathbf{U}) \cdot \bar{\mathbf{q}} + \text{Re}(\mathbf{W}) \cdot \boldsymbol{\eta})^T (\text{Im}(\mathbf{s}) + \text{Im}(\mathbf{U}) \cdot \bar{\mathbf{q}} + \text{Im}(\mathbf{W}) \cdot \boldsymbol{\eta})^T \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\eta}^T]^T \quad (34)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= [\Delta f^T \text{Re}^T(\boldsymbol{\alpha}) \text{Im}^T(\boldsymbol{\alpha})]^T \\ \mathbf{U} &= \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^s \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{q}}}^s, \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^s \cdot [\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta f} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Im}(\boldsymbol{\alpha})}^s] \end{aligned} \right. \quad (35)$$

根据式(34)可得

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{F} \boldsymbol{\mu} \quad (36)$$

式中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \text{Re}(\mathbf{U}) & \text{Re}(\mathbf{W}) \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} & \text{Im}(\mathbf{U}) & \text{Im}(\mathbf{W}) \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \text{Re}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{q}}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}}^{\perp} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{q}}}) & \text{Re}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{q}}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}}^{\perp} \cdot [\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta f} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Im}(\boldsymbol{\alpha})}^s]) \\ \text{Re}([\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta f} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Im}(\boldsymbol{\alpha})}^s]^H \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}}^{\perp} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{q}}}) & \text{Re}([\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta f} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Im}(\boldsymbol{\alpha})}^s]^H \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}}^{\perp} \cdot [\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta f} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Im}(\boldsymbol{\alpha})}^s]) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Re}(\boldsymbol{\Psi}) & \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}) \\ \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}^H) & \text{Re}(\boldsymbol{\Xi}) \end{bmatrix}$$

根据式(38)至式(40)以及分块矩阵求逆公式可得  $\text{CRB}(\bar{\mathbf{q}})$  的闭式表达式为

$$\text{CRB}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{trace}(\text{Re}(\boldsymbol{\Psi}) - \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \text{Re}^{-1}(\boldsymbol{\Xi}) \cdot \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}^H))^{-1} \quad (41)$$

#### 4.2 目标运动航迹估计方差的克拉美罗界

本小节将根据第 4.1 小节中的结论推导目标航迹估计方差的克拉美罗界表达式,即估计每个时隙段目标位置向量  $\mathbf{q}_k$  的克拉美罗界表达式. 根据第 2 节的讨论可知,目标在第  $k$  个时隙段的位置向量可以表示为

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_0 + (k-1)T\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{I}(k-1)T\mathbf{I}] \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (42)$$

根据式(41)和式(42)可知,在第  $k$  个时隙段目标位置向量  $\mathbf{q}_k$  估计方差的克拉美罗界可以表示为

$$\text{CRB}(\mathbf{q}_k) = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{trace}([\mathbf{I}(k-1)T\mathbf{I}] \cdot (\text{Re}(\boldsymbol{\Psi}) - \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \text{Re}^{-1}(\boldsymbol{\Xi}) \cdot \text{Re}(\boldsymbol{\Omega}^H))^{-1} \cdot [\mathbf{I}(k-1)T\mathbf{I}]^T) \quad (43)$$

根据命题 2 可知关于向量  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  的估计方差克拉美罗界矩阵可以表示为

$$\text{CRB}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{F} \cdot \text{CRB}(\boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{F}^T = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{F} \cdot \text{Re}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\boldsymbol{\mu}}}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\boldsymbol{\mu}}}) \cdot \mathbf{F}^T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (38)$$

式中

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \text{Re}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}) & -\text{Im}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}) \\ \text{Im}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}) & \text{Re}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{Re}(s)}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

## 5 仿真实验

### 5.1 算法对未知参量 $\bar{\mathbf{q}}$ 的估计性能的比较

由于目标的整个运动航迹可直接由向量  $\bar{\mathbf{q}}$  来决定,因此对参量  $\bar{\mathbf{q}}$  的估计精度决定了对目标运动航迹的估计精度. 基于这一考虑,这里首先比较算法对未知参量  $\bar{\mathbf{q}}$  的估计性能,其中比较了三种算法,分别为基于 Newton 迭代的直接定位方法、基于网格搜索的直接定

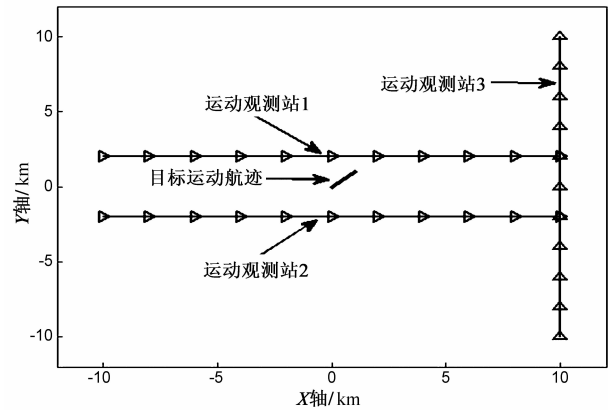


图1 目标与观测站运动航迹示意图

位方法以及基于差分多普勒的两步估计定位方法.

假设目标辐射源的初始位置向量为  $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0]^T \text{m}$ , 速度向量为  $\dot{\mathbf{q}} = [10 \ 10]^T \text{m/s}$ , 目标辐射窄带调频 (FM) 信号, 信号的载波频率为 0.3GHz, 现有三个运动机载观测站可截获其信号, 并且每隔 10s 对信号进行一个时隙段的采样 (共有 11 个时隙段), 观测站的运动速度为 200m/s, 其运动轨迹与目标的运动轨迹如图 1 所示. 另一方面, 信号的载波频率扰动量在  $[-100 \ 100]$

Hz 内服从均匀分布, 信道传播系数的幅度均设为 1, 相位在  $[-\pi \ \pi]$  内服从均匀分布. 首先将每个时隙段内的样本点数固定为 100, 图 2 给出了目标初始位置和运动速度估计均方根误差随着信噪比的变化曲线; 再将信噪比固定为 0dB, 图 3 给出了目标初始位置和运动速度估计均方根误差随着每个时隙段内样本点数的变化曲线.

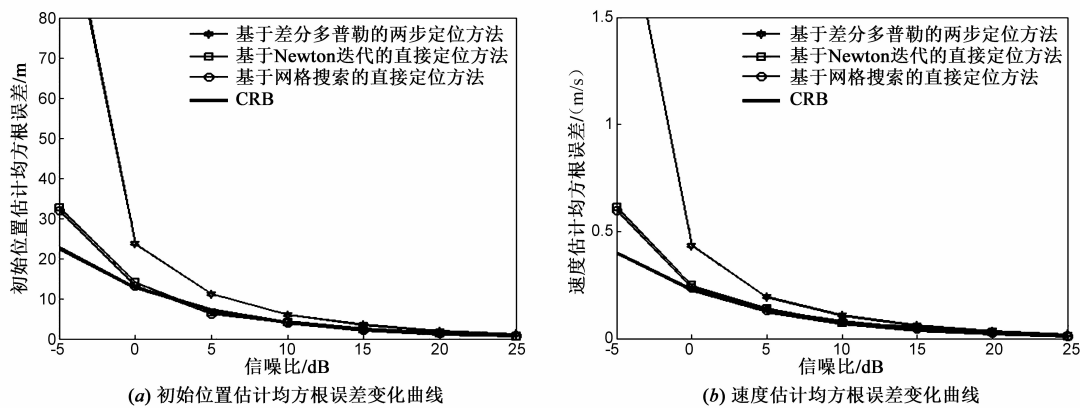


图2 目标初始位置和运动速度估计均方根误差随着信噪比的变化曲线

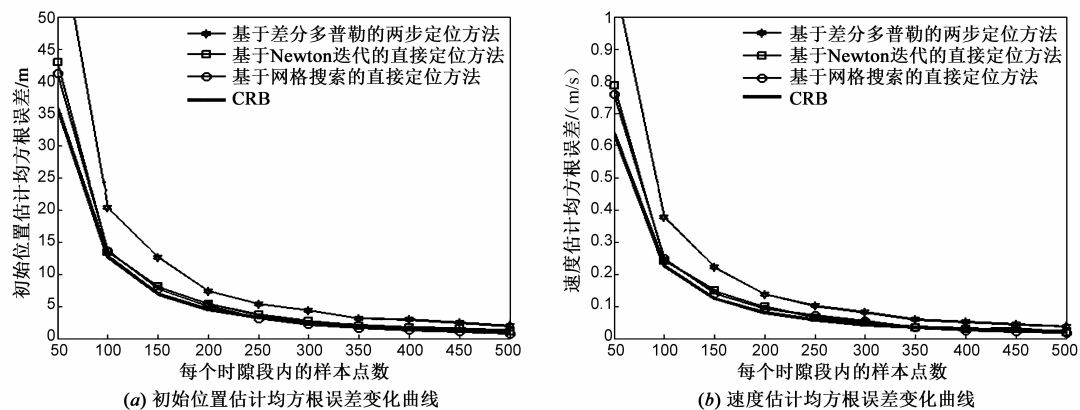


图3 目标初始位置和运动速度估计均方根误差随着每个时隙段内样本点数的变化曲线

图 2 和图 3 结果表明: 本文提出的基于 Newton 迭代的直接定位方法的性能要明显优于基于差分多普勒的两步估计定位方法 (尤其在低信噪比和小样本点情况下), 并且其定位性能与基于网格搜索的直接定位方法基本相当, 它们的性能曲线都可以渐近逼近相应的克拉美罗界曲线.

## 5.2 算法对目标航迹跟踪性能的比较

假设目标辐射源的初始位置向量为  $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0]^T \text{m}$ , 速度向量为  $\dot{\mathbf{q}} = [-8 \ 8]^T \text{m/s}$ , 目标辐射窄带调频 (FM) 信号, 信号的载波频率为 0.3GHz, 信噪比为 -3dB, 现有四个运动机载观测站可截获其信号, 并且每隔 5s 对信号进行一个时隙段的采样, 每个时隙段采

100 个样本点, 观测站的运动速度为 200m/s, 其运动轨迹与目标的运动轨迹如图 4 所示. 另一方面, 信号的载波频率扰动量在  $[-100 \ 100]$  Hz 内服从均匀分布, 信道传播系数的幅度均设为 1, 相位在  $[-\pi \ \pi]$  内服从均匀分布. 图 5 给出了目标位置 (跟踪) 估计均方根误差随着信号采样时隙段数的变化曲线.

图 5 结果表明: 本文提出的基于 Newton 迭代的直接定位方法的目标航迹跟踪性能要明显优于基于差分多普勒的两步估计定位方法, 并且其目标跟踪性能曲线可以渐近逼近相应的克拉美罗界曲线, 从而进一步说明了新方法的优越性.

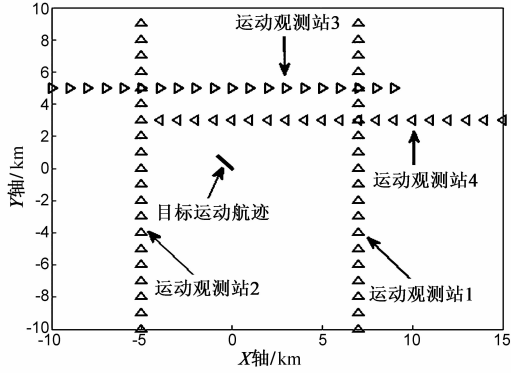


图4 目标与观测站运动航迹示意图

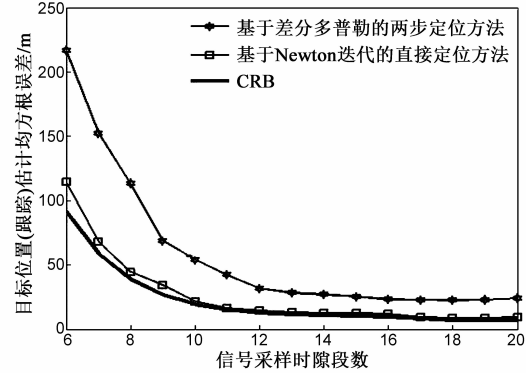


图5 目标位置(跟踪)估计均方根误差随着信号采样时隙段数的变化曲线

### 5.3 算法复杂度的比较

首先定义如下一些参数:(a)Newton 迭代的迭代次数记为  $M_{iter}$ ; (b)在网格搜索中,目标位置和速度在每个维度的搜索区间分别记为  $\Delta_p$  和  $\Delta_v$ ; (c)在网格搜索中,目标位置和速度在每个维度的搜索步长分别记为  $\eta_p$  和  $\eta_v$ . 基于上述符号定义,表 1 和表 2 分别给出了两种直接定位方法的计算复杂度(均以复乘计).

表 1 基于网格搜索的直接定位方法的计算复杂度

定位方法名称	基于网格搜索的直接定位方法		
基本运算单元	计算 $V_k(\bar{q})$	计算 $V_k^H(\bar{q})V_k(\bar{q})$	计算 $\lambda_{\max}\{V_k^H(\bar{q})V_k(\bar{q})\}$
运算单元复杂度	$NL$	$NL^2$	$O(L^3)$
总的计算复杂度	$K \cdot (NL + NL^2 + O(L^3)) \cdot [\Delta_p/\eta_p]^{D/2} \cdot [\Delta_v/\eta_v]^{D/2}$		

表 2 基于 Newton 迭代的直接定位方法的计算复杂度

定位方法名称	基于 Newton 迭代的直接定位方法				
基本运算单元	计算 $V_k(\bar{q})$ ; $\{\dot{V}_{k,d}(\bar{q})\}_{1 \leq d \leq D}$ ; $\{\dot{V}_{k,d_1,d_2}(\bar{q})\}_{1 \leq d_1 \leq d_2 \leq D}$	计算 $V_k^H(\bar{q})V_k(\bar{q})$ ; $\{\dot{V}_{k,d}^H(\bar{q})V_k(\bar{q})\}_{1 \leq d \leq D}$ ; $\{\dot{V}_{k,d_1,d_2}^H(\bar{q})V_k(\bar{q})\}_{1 \leq d_1 \leq d_2 \leq D}$ ; $\{\dot{V}_{k,d_1}^H(\bar{q})\dot{V}_{k,d_2}(\bar{q})\}_{1 \leq d_1 \leq d_2 \leq D}$	计算 $h_k(\bar{q})$	计算 $H_k(\bar{q})$	计算 $\{e_{k,l}\}_{1 \leq l \leq L}$
运算单元复杂度	$NL(D^2 + 3D + 2)/2$	$NL^2(D^2 + 2D + 1)$	$D(L^2 + L)$	$D(D + 1)(L^2 + 2L - 1)/2 + DL^2(L - 1)$	$O(L^3)$
总的计算复杂度	$K \cdot [NL(D^2 + 3D + 2)/2 + NL^2(D^2 + 2D + 1) + D(L^2 + L) + D(D + 1)(L^2 + 2L - 1)/2 + DL^2(L - 1) + O(L^3)] \cdot M_{iter}$				

表 1 和表 2 结果表明,当  $N \gg D$  和  $N \gg L$  时,Newton 迭代中的一次迭代计算量是网格搜索一次搜索计算量的大约  $D^2 + 2D + 1$  倍,然而,Newton 迭代通常在迭代 10 步以内即可收敛,而网格搜索通常要在多维空间中的上千甚至更多个网格内进行计算(以 4 维搜索空间,并且每个维度仅搜索 10 个网格为例,则需要在

10000 网格内计算),因此比较总运算量可知,基于 Newton 迭代的直接定位方法要具有明显优势.

下面再同一仿真平台下比较两者的算法运行时间,仿真条件分别与图 3 完全一致,表 3 给出了两种直接定位方法的平均运行时间(运行 100 次取均值,单位为 s).

表 3 平均运行时间比较( $L=3$ )

每个时隙段内的样本点数	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
基于 Newton 迭代的直接定位方法的运行时间	0.5280	0.5998	0.6627	0.8480	0.9567	1.0347	1.1959	1.3461	1.4298	1.5247
基于网格搜索的直接定位方法的运行时间	16.1052	18.7727	21.5369	28.4095	33.1961	37.0480	44.0095	50.0737	53.2321	59.0812

表 3 结果表明,本文提出的基于 Newton 迭代的直接定位方法具有更少的运行时间.

## 6 结论

本文提出了一种针对匀速运动目标的多普勒频率

直接定位方法. 文中首先依据最大似然准则建立了直接估计目标初始位置和运动速度的数学优化模型, 并针对该优化模型是以矩阵特征值的形式给出而难以进行有效数值优化的问题, 提出了一种基于矩阵特征值扰动定理的 Newton 迭代算法, 该算法具有较快的收敛速度, 可以避免多维参数网格搜索所导致的庞大运算量. 此外, 文中还推导了关于目标初始位置、运动速度以及运动航迹估计的克拉美罗界的闭式表达式, 从而为直接定位方法的参数估计精度提供定量的理论参考. 仿真实验表明: 文中提出的运动目标直接定位方法的性能能够渐近逼近相应的克拉美罗界, 并且其运算效率要远优于多维参数网格搜索方法.

#### 参考文献

- [1] Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm for passive location based on angle information [J]. *Science China: Information Science*, 2009, 52 (6): 1043 – 1054.
- [2] Yang L, Ho K C. An approximately efficient TDOA localization algorithm in closed-form for locating multiple disjoint sources with erroneous sensor positions [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57 (12): 4598 – 4615.
- [3] Yang K, An J P, Bu X Y, Sun G C. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference-of-arrival measurements [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, 59(3): 1558 – 1562.
- [4] Ho K C, Chan Y T. An asymptotically unbiased estimator for bearings-only and Doppler-bearing target motion analysis [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54 (3): 809 – 822.
- [5] Yang L, Sun M, Ho K C. Doppler-bearing tracking in the presence of observer location error [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 4082 – 4087.
- [6] 李金洲, 郭福成. 传感器位置误差条件下仅用到达频率差的无源定位性能分析 [J]. *航空学报*, 2011, 32 (8): 1497 – 1505.  
Li Jin-zhou, Guo Fu-cheng. Performance analysis for passive source localization using merely FDOA measurements with erroneous receiver positions [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32 (8): 1497 – 1505. (in Chinese)
- [7] 杨天池, 金梁, 程娟. 一种基于 TOA 定位的 Chan 改进算法 [J]. *电子学报*, 2009, 37(4): 819 – 822.  
Yang Tian-chi, Jin Liang, Chen Juan. An improvement Chan algorithm based on TOA position [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(4): 819 – 822. (in Chinese)
- [8] Mason J. Algebraic two-satellite TOA/FOA position solution on an ellipsoidal earth [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 40(7): 1087 – 1092.
- [9] Ho K C, Sun M. Passive source localization using time differences of arrival and gain ratios of arrival [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56 (2): 464 – 477.
- [10] Amar A, Weiss A J. Localization of narrowband radio emitters based on Doppler frequency shifts [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56 (11): 5500 – 5508.
- [11] Weiss A J. Direct geolocation of wideband emitters based on delay and Doppler [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2513 – 5520.
- [12] Weiss A J. Direct position determination of narrowband radio frequency transmitters [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(5): 513 – 516.
- [13] Amar A, Weiss A J. Direct position determination of multiple radio signals [J]. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2005, 1(1): 37 – 49.
- [14] Amar A, Weiss A J. Direct position determination in the presence of model errors—known waveforms [J]. *Digital Signal Processing*, 2006, 16(1): 52 – 83.
- [15] Oispuu M, Nickel U. Direct detection and position determination of multiple sources with intermittent emission [J]. *Signal Processing*, 2010, 90(12): 3056 – 3064.
- [16] 张敏, 郭福成, 周一宇. 基于单个长基线干涉仪的运动单站直接定位 [J]. *航空学报*, 2013, 34(2): 378 – 386.  
Zhang Min, Guo Fu-cheng, Zhou Yi-yu. A single moving observer direct position determination method using a long baseline interferometer [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(2): 378 – 386. (in Chinese)
- [17] Stoica P, Larsson E G. Comments on “Linearization method for finding Cramér-Rao bounds in signal processing” [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49 (12): 3168 – 3169.

#### 作者简介



王 鼎 男, 1982 年生于安徽芜湖. 现为解放军信息工程大学信息工程学院讲师. 主要研究方向为无源定位和阵列信号处理.

E-mail: wang\_ding814@aliyun.com

张 刚 男, 1975 年生于河南西平. 现为解放军信息工程大学讲师. 主要研究方向为通信与信息处理.

E-mail: ztiger1001005@126.com